

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Директор Высшей школы**  
**современной математики**  
**А.Н. Соболевский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория полей классов
<b>по направлению:</b>	Математика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная математика
	Высшая школа современной математики
	Высшая школа современной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 84 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составил: М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

## Аннотация

Теория полей классов - область алгебраической теории чисел, целью которой является описание абелевых расширений (конечных расширений Галуа с коммутативной группой Галуа) локальных и глобальных полей в терминах объектов, связанных с основным полем. Данная дисциплина восходит к Кронекеру и Гильберту, однако получила значительное развитие в последние десятилетия. Курс представляет собой обзор современного состояния теории полей классов.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Формирование базовых знаний по теории полей классов надо локальными и глобальными полями.

#### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической теории чисел;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов алгебры в других математических дисциплинах.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия и результаты теории полей классов.

уметь:

Уметь разбирать конкретные примеры и проводить необходимые теоретико-числовые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с приложениями теории полей классов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теория полей классов, её источники и обобщения.	4			10
2	Расширения глобальных полей.	4			8
3	Когомологии конечных групп.	4			8
4	Когомологии Тейта.	2			8
5	Теория Галуа бесконечных расширений.	2			10
6	Общая теория формаций классов.	2			8
7	Абелевы расширения локальных полей.	2			8
8	Когомологии классов идеалов.	4			8
9	Группы ветвления.	4			8
10	Теория Любина-Тейта.	2			8
Итого часов		30			84
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

##### 1. Теория полей классов, её источники и обобщения.

Теория полей классов, её источники и обобщения.

##### 2. Расширения глобальных полей.

Расширения глобальных полей.

Группы разложения.

Элементы Фробениуса.

Круговые поля.

Отображение взаимности.

##### 3. Когомологии конечных групп.

Когомологии конечных групп.

Проективные и инъективные резольвенты.

Стандартный комплекс.

Замена групп.

Спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра.

##### 4. Когомологии Тейта.

Когомологии Тейта.  
Категорное описание.  
Циклические группы и индекс Эрбрана. Произведения.  
Теорема Тэйта-Накаямы.

#### 5. Теория Галуа бесконечных расширений.

Теория Галуа бесконечных расширений.  
Когомологии проконечных групп.

#### 6. Общая теория формаций классов.

Общая теория формаций классов.

#### 7. Абелевы расширения локальных полей.

Абелевы расширения локальных полей.  
Вычисление группы Брауэра.

#### 8. Когомологии классов идеалов.

Когомологии классов идеалов.  
Фундаментальный класс.  
Доказательство закона взаимности.  
Теорема существования.

#### 9. Группы ветвления.

Группы ветвления.  
Мера Артина.  
Функция Хассе-Эрбрана.  
Абелевы кондукторы.

#### 10. Теория Любина-Тэйта.

Теория Любина-Тэйта.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

### **6.Перечень рекомендуемой литературы**

#### Основная литература

1. Основы теории чисел, учеб. пособие / И. М. Виноградов. — СПб., Лань, 2020.— URL:  
<https://e.lanbook.com/book/139285> (дата обращения: 27.01.2021). - Полный текст (Режим доступа  
: из сети МФТИ / Удаленный доступ)

#### Дополнительная литература

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<https://old.mccme.ru/iium/courses.php>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Математика  
**профиль подготовки:** Фундаментальная математика  
Высшая школа современной математики  
Высшая школа современной математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория полей классов» обучающийся должен:

### знать:

Основные понятия и результаты теории полей классов.

### уметь:

Уметь разбирать конкретные примеры и проводить необходимые теоретико-числовые вычисления.

### владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с приложениями теории полей классов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Теория полей классов, её источники и обобщения.
2. Расширения глобальных полей. Группы разложения. Элементы Фробениуса. Круговые поля. Отображение взаимности.
3. Когомологии конечных групп. Проективные и инъективные резольвенты. Стандартный комплекс. Замена групп. Спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра.
4. Когомологии Тейта. Категорное описание. Циклические группы и индекс Эрбрана. Произведения. Теорема Тэйта - Накаямы.
5. Теория Галуа бесконечных расширений. Когомологии проконечных групп.
6. Общая теория формаций классов.
7. Абелевы расширения локальных полей. Вычисление группы Брауэра.
8. Когомологии классов идеалов. Фундаментальный класс. Доказательство закона взаимности.

9. Теорема существования.

10. Группы ветвления. Мера Артина. Функция Хассе-Эрбрана. Абелевы кондукторы.

11. Теория Любина-Тэйта.

Пример экзаменационного билета:

1) Когомологии проконечных групп.

2) Пример вычисления абелева расширения.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.